

**ÜBER DIE L^p -STRUKTUR IN
REELLEN BANACHRAUMEN**

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Konrad Meyfarth
aus Unshausen

1975

ÜBER DIE L^p -STRUKTUR IN REELLEN BANACHRÄUMEN

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik der
Freien Universität Berlin



vorgelegt von
Konrad Meyfarth
aus Unshausen

1. Referent : Professor Dr. E. Behrends

2. Referent : Professor Dr. H. Pachale



Tag der mündlichen Prüfung : 30. Januar 1975

Tag der Promotion : 23.4.1975

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung und Grundbegriffe	5
2. Die L^p -Struktur von CK und C_0L	8
3. Übersicht der L^p -Struktur spezieller Banachräume	21
4. L^p -Struktur in Unter- und Quotientenräumen und Erbhchkeitsfragen	24
5. Die Isometrie zwischen $C_p(X)$ und $C_q(X')$	35
6. Z -Ideale	38

Diese Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojekt-
schwerpunktes

"Strukturtheorie reeller und komplexer Banachräume"

an der Freien Universität Berlin.

Mein besonderer Dank gilt dem Leiter dieses Projektes,
Prof. Dr. E. Behrends, und für viele anregende Diskussionen
Rainer Danckwerts, Richard Evans und Silke Göbel.

1. EINLEITUNG UND GRUNDBEGRIFFE

In dieser Arbeit werden reelle Banachräume untersucht. Ein linearer Operator e auf einem Banachraum X heißt L^p -Projektion ($1 \leq p < \infty$), falls e idempotent ist und für alle $x \in X$ stets $\|x\|^p = \|ex\|^p + \|x - ex\|^p$ gilt. Genügt e der Normbedingung $\|x\| = \max \{\|ex\|, \|x - ex\|\}$ für alle $x \in X$, so heißt e L^∞ -Projektion.

Ein abgeschlossener Unterraum N heißt L^p -Summand für $1 \leq p \leq \infty$, falls $N = \text{Bild } e$ ist. Im Falle $p = 1$ wird auch von L -Projektionen und L -Summanden und für $p = \infty$ von M -Projektionen und M -Summanden gesprochen.

Für zwei komplementäre L^p -Summanden N und M , wobei $x \in N$ und $y \in M$ ist, gilt stets $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ bzw. $\|x + y\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$ und außerdem ist $\|x + y\| = \|x - y\|$.

Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichne $\mathbb{P}_p$ die Menge der L^p -Projektionen auf X . Nach [AE II] kommutieren L^p -Projektionen für $p = 1$ und $p = \infty$. [B₂] hat gezeigt, daß auch für $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ je zwei L^p -Projektionen kommutieren. Für $p = 2$ ist dies i.a. falsch, da etwa im Hilbertraum L^2 -Projektionen genau dann kommutieren, wenn ihre Bilder ineinander enthalten sind.

Weiterhin ist von [B₂] gezeigt worden, daß es für $1 \leq p, q \leq \infty$, $p \neq q$, $(1, \infty) \neq (p, q) \neq (\infty, 1)$ nicht gleichzeitig nichttriviale L^p -Summanden und nicht-

triviale L^q -Summanden geben kann. Ist zusätzlich $\dim X > 2$, so können auch nicht gleichzeitig nichttriviale L^1 -Summanden und nichttriviale L^∞ -Summanden existieren. Nach [CS] Lemma 9 und Satz 4.4 in der vorliegenden Arbeit ist das Produkt von zwei L^p -Projektionen ($p \neq 2$) wieder eine L^p -Projektion. Definiert man analog zum Fall $p = 1$ [AE II] für $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ die Cunninghamham- p -Algebra $C_p(X) := (\mathcal{L}P_p)^-$, so ist $C_p(X)$ eine kommutative, abgeschlossene Unteralgebra von $[X]$ mit Einselement. Dabei ist $[X]$ die Algebra aller linearen, stetigen Operatoren auf X .

Als Zentralisator $Z(X)$ wird die Menge der beschränkten Operatoren T auf X bezeichnet, deren Adjungierte T' in $C_1(X')$ liegt. Ein abgeschlossener Unterraum $J \subset X$ heißt M -Ideal, wenn der Annihilator $J^0 \subset X'$ ein L -Summand ist.

Aufbauend auf Ergebnissen von Alfsen-Effros: 'Structure in real Banach spaces' wird in der vorliegenden Arbeit in Kapitel 2 die L^p -Struktur von CK - und C_0L -Räumen untersucht und in Kapitel 3 eine Übersicht der L^p -Struktur spezieller Banachräume gegeben. In Kapitel 4 werden Resultate von [AE II] für $p = 1$ über Unter- und Quotientenräume und Erbliehkeitsfragen auf $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ erweitert. Weiterhin wird die isometrische Isomorphie zwischen $C_p(X)$ und $C_q(X')$ bewiesen (Kapitel 5). Im 6. Kapitel schließlich wird eine spezielle Klasse abgeschlossener Unterräume untersucht (Z -Ideale), die den Zentralisator eines Banachraumes

im folgenden Sinn mißt:

$Z(X)$ ist trivial genau dann, wenn nur triviale Z -Ideale existieren.

2. DIE L^p -STRUKTUR VON CK UND C_0L

2.1 M -Ideale und M -Summanden in CK und C_0L

Sei K ein kompakter Raum, CK die Menge der stetigen Funktionen auf K , L ein lokalkompakter (aber nicht kompakter) topologischer Raum, C_0L die Menge der im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen auf L , $LU\{\infty\}$ die Einpunkt- und βL die Stone-Čech-Kompaktifizierung von L .

Bezeichnet $i : L \longrightarrow \beta L$ die natürliche Einbettung, so ist βL durch folgende Eigenschaft universell charakterisiert: Zu jedem kompakten topologischen Raum K und jeder stetigen Abbildung $f : L \rightarrow K$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\hat{f} : \beta L \rightarrow K$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & K \\ i \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\ \beta L & & \end{array}$$

Es gilt dabei die isometrische Isomorphie

$$C^b L \cong C\beta L.$$

Für den Raum CK besteht nach [AE II] S. 139 eine eindeutige Beziehung zwischen den M -Idealen bzw. M -Summanden J in CK und den abgeschlossenen bzw. offen-abgeschlossenen (clopen) Mengen A in K , wobei die zugehörigen abgeschlossenen Unterräume in CK jeweils die Annihilatoren dieser Mengen sind, also

$$J = J_A := \{f \in CK; f|_A = 0\}.$$

Im folgenden wird gezeigt, daß $C_0 L$ isometrisch isomorph ist sowohl zu einem M -Ideal in $C(LU\{\infty\})$ als auch zu einem M -Ideal in $C\beta L$. Weiterhin werden die M -Ideale und M -Summanden in $C_0 L$ bestimmt.

2.1 Satz

$C_0 L$ ist bis auf Isometrie ein M -Ideal in $C(LU\{\infty\})$, genauer gilt:

$$C_0 L \cong J_{\{\infty\}}$$

Beweis

Durch die Einschränkungsabbildung $\circ|_L : J_{\{\infty\}} \rightarrow C_0 L$ wird ein isometrischer Isomorphismus definiert, da die Komplemente in $LU\{\infty\}$ von kompakten Mengen in L eine Umgebungsbasis von ∞ bilden. Damit ist $C_0 L$ sogar isomorph einem maximalen M -Ideal in $C(LU\{\infty\})$, denn $J_{\{\infty\}}$ ist der Annihilator einer abgeschlossenen einelementigen Menge, aber $J_{\{\infty\}}$ ist kein M -Summand, denn $\{\infty\}$ ist nicht clopen in $LU\{\infty\}$.

2.2 Satz

$C_0 L$ ist bis auf Isometrie ein M -Ideal in $C\beta L$, genauer gilt:

$$C_0 L \cong J_{\beta L \setminus i(L)}$$

Beweis

Da L lokalkompakt ist, ist $i(L) \subset \beta L$ offen nach [GJ] 3.15 D, also $\beta L \setminus i(L) \subset \beta L$ abgeschlossen, und damit ist $J_{\beta L \setminus i(L)}$ ein M -Ideal in $C\beta L$.

Betrachte für die Konstruktion der Abbildung C_0L in $J_{\beta L \setminus i(L)}$ zu $f \in C_0L$ das universell zugehörige $\hat{f} \in C\beta L$, sodaß $\hat{f} \circ i = f$ ist. Es soll gezeigt werden, daß $\hat{f}|_{\beta L \setminus i(L)} = 0$ ist.

Angenommen es gibt ein $x \in \beta L \setminus i(L)$ mit $\hat{f}(x) \neq 0$, also o.B.d.A. $|\hat{f}(x)| > 1$. Dann existiert eine Umgebung $U_0 \in \mathcal{U}(x)$ in βL mit $|\hat{f}|_{U_0} > 1$ und damit

$U_0 \cap i(L) \subset \{|\hat{f}| \geq 1\}$. Also gilt $i^{-1}(U_0) \subset \{|f| \geq 1\}$ und $ii^{-1}(U_0) \subset i\{|f| \geq 1\} \subset i(L)$. Da $\{|f| \geq 1\} \subset L$ kompakt ist, ist $i\{|f| \geq 1\}$ kompakt in βL und damit $(ii^{-1}(U_0))^{-\beta L} \subset i(L)$. Nun ist

$$i(L)^{-\beta L} \cap U_0 \subset (U_0 \cap i(L))^{-\beta L} = (ii^{-1}(U_0))^{-\beta L} \subset i(L).$$

Also ist $x \in i(L)$ im Widerspruch zur Annahme.

Zum Beweis der Surjektivität sei $g \in J_{\beta L \setminus i(L)}$, also $g|_{\beta L \setminus i(L)} = 0$. Da für ein beliebiges $\epsilon > 0$ die Menge $\{|g| \geq \epsilon\} \subset \beta L$ kompakt und $\{|g| \geq \epsilon\} \subset i(L)$ ist, folgt $f := g \circ i \in C_0L$ mit $\hat{f} = g$.

Da die Zuordnung $f \mapsto \hat{f}$ linear und isometrisch ist, folgt die Behauptung.

Nun wird gezeigt, daß die M -Ideale und M -Summanden in C_0L , ebenso wie für CK , Annihilatoren von abgeschlossenen bzw. clopen Mengen in L sind.

In den weiteren Betrachtungen wird das folgende Lemma mehrfach verwendet.

2.3 Lemma

Ist $N \subset L$ kompakt, $A \subset L \setminus N$ abgeschlossen und $1 \in CN$,
so existiert ein $f \in C_0 L$ mit

$$f|_N = 1, f|_A = 0 \text{ und } \|f\|_{C_0 L} = \|1\|_{CN}.$$

Beweis

$K = LU\{\infty\}$ ist kompakt, also auch normal. Da N in L kompakt ist, ist N abgeschlossen in K . A ist in L abgeschlossen, also ist $AU\{\infty\}$ abgeschlossen in K .

Die in K abgeschlossene Menge $NUAU\{\infty\}$ mit der Spurtopologie ist topologisch direkte Summe von N und $AU\{\infty\}$. Daher ist die Funktion

$$1' : LU\{AU\{\infty\}\} \rightarrow [-\|1\|, \|1\|]$$

definiert durch $1'|_L = 1$ und $1'|_{AU\{\infty\}} = 0$ stetig.

Nach dem Satz von Tietze existiert eine isometrische Fortsetzung auf K , deren Einschränkung auf L die gewünschte Eigenschaft hat.

2.4 Satz

Die M -Ideale in $C_0 L$ sind genau die Annihilatoren abgeschlossener Teilmengen von L .

Beweis

Da nach Satz 2.1 $C_0 L \cong J_{\{\infty\}}$ und $J_{\{\infty\}}$ ein M -Ideal in $C(LU\{\infty\})$ ist, ist nach [AE II] Prop. 2.2 ein Unterraum J bis auf Isometrie ein M -Ideal in $C_0 L$ genau dann, wenn J

ein M -Ideal in $C(L \cup \{\infty\})$ ist und $J \subset J_{\{\infty\}}$ gilt. J hat daher die Form J_T mit abgeschlossenem $T \subset L \cup \{\infty\}$ und $\infty \in T$. Da dann $T = A \cup \{\infty\}$ mit abgeschlossenem $A \subset L$ gilt, und $J_{A \cup \{\infty\}}$ unter obiger Isomorphie genau J_A entspricht, folgt die Behauptung.

2.5 Satz

Die M -Summanden in $C_0 L$ sind genau die Annihilatoren von clopen Teilmengen von L .

Beweis

Sei $A \subset L$ clopen. Dann ist J_A als Annihilator von A auch ein M -Ideal. Nach [AE II] Satz 2.9 genügt die Existenz eines M -Ideals J' mit $J_A \oplus J' = C_0 L$. Nach Satz 2.4 ist $J' := J_{L \setminus A}$ ein M -Ideal in $C_0 L$ und $J_A \cap J' = \{0\}$. Für $f \in C_0 L$ ist wegen $\chi_A \in CL$ auch $f \cdot \chi_A \in CL$ und wegen $|f \cdot \chi_A| \leq |f|$ sogar $f \cdot \chi_A \in C_0 L$. Damit ist auch $f \cdot \chi_{L \setminus A} = f - f \cdot \chi_A \in C_0 L$. Also ist $f = f \cdot \chi_A + f \cdot \chi_{L \setminus A} \in J_A + J'$, womit $J_A + J' = C_0 L$ bewiesen ist.

Umgekehrt sei J ein M -Summand in $C_0 L$. Dann existiert ein komplementärer M -Summand J' in $C_0 L$, so daß $J \oplus J' = C_0 L$ ist. Da J und J' M -Ideale sind, gilt $J = J_A$ und $J' = J_B$ für abgeschlossene Mengen $A, B \subset L$. Es bleibt zu zeigen, daß $A = L \setminus B$ ist.

Wäre $x \in L \setminus (A \cup B)$, so existiert nach Lemma 2.3 eine Funktion $0 \neq f \in J_A \cap J_B = \{0\}$, denn $\{x\}$ ist kompakt und $A \cup B$ abgeschlossen.

Wäre $x \in A \cap B$, so gäbe es ein $f \in C_0 L$ mit $f(x) = 1$.

Also gilt $f \notin J_{A \cap B}$.

Andererseits ist aber $f \in C_0 L = J_A + J_B \subset J_{A \cap B}$.

Aus diesen beiden Widersprüchen folgt, daß L die disjunkte Vereinigung von A und B ist, und damit ist A clopen.

Für $1 < p < \infty$ haben CK und $C_0 L$ nur triviale L^p -Struktur, und es existiert nichttriviale L -Struktur genau dann, wenn K zweipunktig ist. ([E] S. 26)

2.2 Der Zentralisator von CK und $C_0 L$

Es wird gezeigt, daß $Z(C_0 L)$ und $C^b L$ und damit auch $Z(CK)$ und CK algebra-, norm- und ordnungsisomorph sind.

2.6 Lemma

Sei $T \in Z(C_0 L)$, $x \in L$ fest gewählt und $f \in C_0 L$ mit $f(x) = 0$, dann ist $(Tf)(x) = 0$.

Beweis

Da $C_0 L$ ein F -Raum ist, ist T nach [AE II] Cor. 6.7 ordnungsbeschränkt, d.h. es gibt ein $\lambda \geq 0$ mit

$-\lambda I \leq T \leq \lambda I$. Falls $f \geq 0$ ist, folgt aus $f(x) = 0$ wegen

$-\lambda f \leq Tf \leq \lambda f$, daß $(Tf)(x) = 0$ ist.

Falls f beliebig ist, so gilt $f = \sup(f, 0) + \inf(f, 0) =: f_1 + f_2$ und $Tf = Tf_1 - T(-f_2)$. Ist $f(x) = 0$, so auch

$f_1(x) = -f_2(x) = 0$. Da $f_1 \geq 0$ und $-f_2 \geq 0$ ist, folgt ebenso $(Tf_1)(x) = 0 = T(-f_2)(x)$.

Also ist $Tf(x) = 0$.

Für $f_0 \in C^b L$ sei $T_{f_0} \in [C_0 L]$ definiert durch

$T_{f_0}(f) = f_0 \cdot f$ (Multiplikationsoperator).

2.7 Satz

$Z(C_0 L) = \{T_{f_0} ; f_0 \in C^b L\}$

Beweis

Sei $f_0 \in C^b L$. Um zu zeigen, daß T_{f_0} M -beschränkt ist, genügt es zu zeigen, daß T_{f_0} ordnungsbeschränkt ist, da $C_0 L$ ein F -Raum ist.

Für $f \in (C_0 L)^+$ gilt $-\|f_0\| \cdot f \leq f_0 \cdot f \leq \|f_0\| \cdot f$ und daher

$-\|f_0\| \cdot If \leq T_{f_0} f \leq \|f_0\| \cdot If$. Also folgt

$-\|f_0\| \cdot I \leq T_{f_0} \leq \|f_0\| \cdot I$.

Umgekehrt sei $T \in Z(C_0 L)$ und definiere $f_0(x) := (T\varphi)(x)$ für $\varphi \in C_0 L$ mit $\varphi(x) = 1$. Die Funktion f_0 ist wohldefiniert, denn solche $\varphi \in C_0 L$ existieren nach Lemma 2.3 und für $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0 L$ mit $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 1$ gilt $(\varphi_1 - \varphi_2)(x) = 0$ und damit nach Lemma 2.6 auch $(T\varphi_1)(x) - (T\varphi_2)(x) =$
 $= T(\varphi_1 - \varphi_2)(x) = 0$.

Weiterhin ist f_0 stetig auf L . Dazu sei $x_0 \in L$ und U eine kompakte Umgebung von x_0 . Man wähle $\varphi \in C_0 L$ mit $\varphi|_U = 1$. Dann ist $(T\varphi)(x) = f_0(x)$ für alle $x \in U$ und damit ist f_0 stetig in $x_0 \in L$.

Außerdem ist f_0 eine beschränkte Funktion auf L . Zum Beweis hierfür sei $x \in L$ beliebig und gemäß der Definition von f_0 $\varphi \geq 0$ gewählt. Da T ordnungsbeschränkt ist, folgt wegen

- $\lambda\varphi \leq T\varphi \leq \lambda\varphi$, daß
 - $\lambda\varphi(x) \leq T\varphi(x) \leq \lambda\varphi(x)$ und damit
 - $\lambda \leq f_0(x) \leq \lambda$, also gilt
- $$\|f_0\|_\infty \leq \lambda.$$

Für diese Funktion $f_0 \in C^b L$ gilt $T = T_{f_0}$, denn sei $f \in C_0 L$ und $x \in L$, so definiere $g := f - f(x) \cdot \varphi$, wobei φ wie in der Definition von f_0 gewählt wird. Wegen $g(x) = 0$, folgt nach Lemma 2.6 auch $Tg(x) = 0$, also $Tf(x) = f_0(x) \cdot f(x)$, womit T ein Multiplikationsoperator auf $C_0 L$ ist.

2.8 Korollar

$Z(CK) = \{ \text{Multiplikationsoperator auf } CK \}$

Da die Abbildung $f_0 \longmapsto T_{f_0}$ offenbar ein Algebrenisomorphismus ist, folgt

2.9. Korollar

$Z(C_0 L) \cong C^b L$ als Algebra-, Norm- und Ordnungsisomorphismus

2.10. Korollar

$$Z(CK) \cong CK$$

Für die spätere Bestimmung der Z -Ideale in CK wird im folgenden der Kommutator von $Z(CK)$ berechnet. Der Beweis beruht im wesentlichen auf der Übertragung einer Beweis-idee von [E] Satz 3.1.

2.11 Lemma

Sei $T \in [Z(CK)]_{\text{Komm}}$, $x \in K$ fest und $\varphi \in CK$ mit $\varphi(x) = 0$, dann ist $(T\varphi)(x) = 0$.

Beweis

Sei $\varphi \in CK$ mit $\varphi(x) = 0$ und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Umgebung $U_\epsilon \in \mathcal{U}(x)$ mit $|\varphi|_{U_\epsilon} \leq \epsilon$.

Betrachte eine Funktion $\varphi_\epsilon \in CK$ mit $\varphi_\epsilon(x) = 1$, $\varphi_\epsilon|_{CU_\epsilon} = 0$

und $0 \leq \varphi_\epsilon \leq 1$ und den Multiplikationsoperator $T_\epsilon: CK \longrightarrow CK$ definiert durch $T_\epsilon(f) = f \cdot \varphi_\epsilon$. Dann ist $T_\epsilon \in Z(CK)$ nach

Korollar 2.8. Nach Konstruktion von φ_ϵ ist $\|T_\epsilon \varphi\| \leq \epsilon$, denn für $\bar{x} \in U_\epsilon$ folgt $|(T_\epsilon \varphi)(\bar{x})| = |\varphi(\bar{x}) \cdot \varphi_\epsilon(\bar{x})| \leq |\varphi(\bar{x})| \leq \epsilon$

und für $\bar{x} \in CU_\epsilon$ gilt $|(T_\epsilon \varphi)(\bar{x})| = |\varphi(\bar{x}) \cdot \varphi_\epsilon(\bar{x})| = 0$.

Also gilt folgende Abschätzung für $T \in [Z(CK)]_K$:

$$|(T\varphi)(x)| = |\varphi_\epsilon(x)(T\varphi)(x)| = |\varphi_\epsilon \cdot (T\varphi)(x)| = |(T_\epsilon T\varphi)(x)| \leq \|T_\epsilon T\varphi\| = \|TT_\epsilon\varphi\| \leq \|T\| \cdot \|T_\epsilon\varphi\| \leq \|T\| \cdot \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war, ist $(T\varphi)(x) = 0$.

2.12 Satz

$$[Z(CK)]_{\text{Komm}} = Z(CK)$$

Beweis

Nach Korollar 2.10 gilt: $Z(CK) \cong CK$. Also bleibt zu zeigen, daß $[Z(CK)]_K \cong CK$ ist.

Für $T \in [Z(CK)]_K$ wird eine stetige Funktion f_T definiert:

$$f_T : K \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{(Tg)(x)}{g(x)}$$

wobei $g \in CK$ mit $g(x) \neq 0$ ist.

Diese Funktion f_T ist wohldefiniert, denn ist auch $\bar{g} \in CK$ mit $\bar{g}(x) \neq 0$, so gilt:

$$(g - \frac{g(x)}{\bar{g}(x)} \bar{g})(x) = 0, \text{ also folgt nach Lemma 2.11}$$

$$[T(g - \frac{g(x)}{\bar{g}(x)} \bar{g})] = 0, \text{ und da } T \text{ linear ist}$$

$$\frac{(Tg)(x)}{g(x)} = \frac{(T\bar{g})(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $T\varphi = f_T \cdot \varphi$ für alle $\varphi \in CK$ ist.

Sei dazu $\varphi \in CK$ und $x \in K$ beliebig. Für $\varphi(x) = 0$ folgt nach Lemma 2.11 $(T\varphi)(x) = 0$, also $(T\varphi)(x) = 0 = (f_T \cdot \varphi)(x)$. Für $\varphi(x) \neq 0$ folgt nach Definition $f_T(x) = \frac{(T\varphi)(x)}{\varphi(x)}$, also $(T\varphi)(x) = (f_T \cdot \varphi)(x)$.

Damit gilt insgesamt: $[Z(CK)]_K \cong CK \cong Z(CK)$, und da immer $Z(CK) \subset [Z(CK)]_K$ ist, folgt die Gleichheit.

2.3 Die L^p -Struktur der Folgenräume c , c_0 und m

Aus den allgemeinen Betrachtungen über die Räume CK und C_0L ergeben sich für die Folgenräume

- c aller reellen konvergenten Folgen,
- c_0 aller reellen Nullfolgen und
- m aller reellen beschränkten Folgen

über die L^p -Struktur dieser Räume spezielle Aussagen.

Sei dazu $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{N}$. Dann ist c isometrisch isomorph zu $C(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$. Dabei wird jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert x die Funktion $f \in C(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ zugeordnet, die definiert ist durch $f(n) = x_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f(\infty) = x$.

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt:

A offen $\Leftrightarrow [A \subset \mathbb{N} \text{ oder } (\infty \in A \text{ und } CA \subset \mathbb{N} \text{ endlich})]$

A abgeschlossen $\Leftrightarrow [A \subset \mathbb{N} \text{ endlich oder } \infty \in A]$

A clopen $\Leftrightarrow [A \subset \mathbb{N} \text{ endlich oder } (\infty \in A \text{ und } CA \subset \mathbb{N} \text{ endlich})]$.

Dann besteht ein M -Ideal J in c entweder aus den Folgen in c , die an einer vorgegebenen endlichen Teilmenge von N verschwinden oder aus Nullfolgen, die an einer vorgegebenen beliebigen Teilmenge von N gleich Null sind. Im ersten Fall ist J immer ein M -Summand, im zweiten Fall ist J genau dann ein M -Summand, wenn von einer festen Stelle ab alle Folgenglieder gleich Null sind. Die Unterräume J_{n_0} , deren Folgenglieder an einer festen Stelle $n_0 \in N$ verschwinden, sind maximale M -Summanden. Der Folgenraum c_0 ist ein maximales M -Ideal, aber kein M -Summand in c . Für den Zentralisator von c gilt nach Korollar 2.10 $Z(c) \cong c$.

Da $c_0 \cong C_0 N$ ist und alle Teilmengen von N clopen sind, stimmen M -Ideale und M -Summanden in c_0 überein. Sie sind die Annihilatoren beliebiger Teilmengen von N . Der Zentralisator von c_0 ergibt sich nach Satz 2.9: $Z(c_0) \cong m$.

Sei βN die Stone-Čech-Kompaktifizierung von N . Dann ist m isometrisch isomorph zu $C\beta N$, denn jede beschränkte Folge (x_n) ist eine beschränkte, stetige Abbildung f auf N , der wegen der universellen Eigenschaft von βN genau ein $\hat{f} \in C\beta N$ zugeordnet werden kann.

Ein M -Ideal J in m ist dann isomorph der Menge der Funktionen aus $C\beta N$, die auf einer vorgegebenen abgeschlossenen Menge $B \subset \beta N$ verschwinden.

Da die clopen Mengen in βN eineindeutig durch die Teilmengen von N bestimmt werden, wobei

$$\mathcal{O}(N) = \{ D \cap N ; D \text{ clopen in } \beta N \} \text{ ist,}$$

besteht ein M -Summand in m aus den Folgen in m , die an einer vorgegebenen Teilmenge in N gleich Null sind. Für den Zentralisator gilt: $Z(m) \cong m$.

Die L^p -Struktur von c , c_0 und m für $1 \leq p < \infty$ ist trivial.

Als Spezialfall sei noch der $\mathbb{R}^n$ mit der Supremumsnorm betrachtet, wobei $\mathbb{R}^n \cong C(\{1, \dots, n\})$ ist.

Dabei stimmen die M -Ideale mit den M -Summanden überein und sind gerade die achsenparallelen Unterräume. Nur für $n = 2$ existieren auch nichttriviale L -Summanden, nämlich genau die Diagonalen im $\mathbb{R}^2$.

3. ÜBERSICHT DER L^p -STRUKTUR SPEZIELLER BANACHRÄUME

3.1 $L^p(\mu)$

Für den Banachraum $L^p(\mu)$ ($1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$) der p -summierbaren Funktionen auf einem beliebigen Maßraum ist von [E] gezeigt worden, daß IP_p genau aus den pseudocharakteristischen Projektionen besteht.

Im $L^2(\mu)$ - und damit in einem Hilbertraum H - gibt es nichttriviale L^2 -Struktur, nämlich genau die orthogonalen Projektionen. Es gilt sogar folgende Charakterisierung der Hilberträume durch L^2 -Struktur:

3.2 Lemma (Behrends)

Hat ein Banachraum X zu jedem eindimensionalen Unterraum ein L^2 -Komplement, so ist X schon ein Hilbertraum.

Beweis

Seien $x, y \in X$ beliebig, e die L^2 -Projektion auf $\mathcal{L}(\{x\})$ und $ey = \lambda x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|e(x + y)\|^2 + \|x + y - e(x + y)\|^2 \\ &= \|x + \lambda x\|^2 + \|y - \lambda x\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \|x - y\|^2 = \|x - \lambda x\|^2 + \|y - \lambda x\|^2.$$

Da $\|y\|^2 = \|ey\|^2 + \|y - ey\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|y - \lambda x\|^2$ ist,

$$\begin{aligned} \text{folgt} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \\ &= [(1 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 - 2\lambda^2] \cdot \|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Durch diese Normbedingung ist X als Hilbertraum charakterisiert ([DY] S. 151).

3.3 $A(K)$ -Räume

Die L^p -Summanden in den Räumen stetiger, affiner Funktionen auf kompakten, konvexen Mengen sind für $p = \infty$ nach [AE II] gerade die Annihilatoren von abgeschlossenen Split-Seiten mit abgeschlossener Komplementärseite. Falls $\mathbb{P}_\infty$ trivial ist, entsprechen die L^1 -Summanden gerade den möglichen Zerlegungen von K in $K = L \times K_1$, wo K_1 die schwach topologisierte Einheitskugel eines dualen Banachraumes und L eine beliebige kompakte konvexe Menge ist. $[B_1]$

3.4 L -Räume

Die Untersuchung der L^p -Struktur von L -Räumen und Lindenstrauß-Räumen läßt sich auf 2.1 und 3.3 zurückführen, da deren einfache bzw. doppelte Duale vom Typ CK sind und jeder CK ein spezieller $A(K)$ -Raum ist. $[B_1]$

3.5 A -Räume

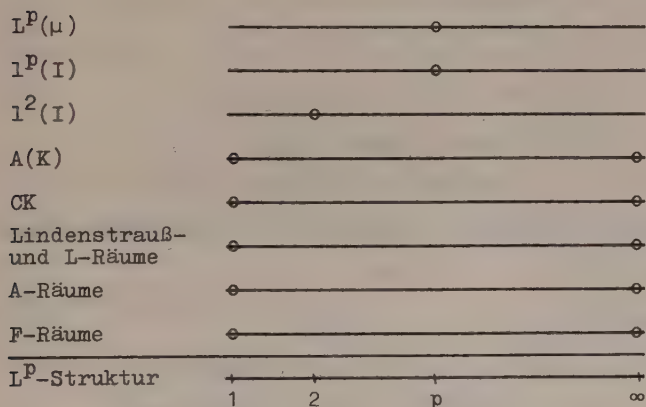
In geordneten Banachräumen mit abgeschlossenem, additivem und 1-erzeugtem Kegel (sog. A -Räume) sind die L^1 -Summanden nach [AE II] Cor. 5.8 gerade die Ordnungssummanden. Für $1 < p < \infty$ ist die L^p -Struktur trivial, da der Dualraum eines A -Raumes X ein $A(K)$ -Raum ist, denn es gilt $X' = A(K)$ mit $K \approx \mathcal{J} X'$. Aber die L^∞ -Struktur eines A -Raumes kann nichttrivial sein, denn ist etwa X ein $A(K)$ -Raum mit nichttrivialer L^1 -Struktur, so ist der Dualraum X' nach [AE II] Thm 6.2 ein A -Raum und hat nach [AE II] Prop. 2.5 nichttriviale L^∞ -Struktur.

3.6 F-Räume

In geordneten Banachräumen mit abgeschlossenem, normalem und approximativ gerichtetem Kegel (sog. F-Räume) sind die M-Summanden nach [AE II] Cor. 6.8 gerade die Ordnungsummanden. Da der Dualraum eines F-Raumes ein A-Raum ist ([AE II] Thm. 6.2), gibt es auch hier nur triviale L^p -Struktur für $1 < p < \infty$. Da jeder A(K)-Raum ein F-Raum ist, kann die L^1 -Struktur nach 3.3 nichttrivial sein.

3.7

Für die in 3.1 bis 3.6 betrachteten Klassen von Banachräumen läßt sich damit folgendes Übersichtsdiagramm ihrer L^p -Struktur aufstellen:



4. L^p -STRUKTUR IN UNTER- UND QUOTIENTENRÄUMEN

UND ERBLICHKEITSFRAGEN

Im folgenden werden Ergebnisse über L -Summanden bei [AE II] verallgemeinert für L^p -Summanden mit $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$.

4.1 Satz

Seien N_i ($i \in I$) L^p -Summanden in einem Banachraum X mit $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$. Dann gilt:

(a) Für endliche I ist $\sum_{i \in I} N_i$ L^p -Summand

(b) $(\sum_{i \in I} N_i)^{\perp}$ ist L^p -Summand

(c) $\bigcap_{i \in I} N_i$ ist L^p -Summand

Beweis

(a) Für zwei L^p -Projektionen e und f seien $e \wedge f = ef$ und $e \vee f = e + f - ef$ definiert. Dann sind ef und $e + f - ef$ idempotent. Nach [CS] Lemma 9 genügt ef der L^p -Normbedingung. Dies gilt auch für $e + f - ef$, da

$$\begin{aligned}
 & \| (e + f - ef)x \|^p + \| x - (e + f - ef)x \|^p \\
 &= \| ex + fx - ef x \|^p + \| x - fx - e(x - fx) \|^p \\
 &= \| ex \|^p + \| fx - ef x \|^p + \| x - fx \|^p - \| e(x - fx) \|^p \\
 &= \| ex \|^p - \| ex - fex \|^p + \| fx - ef x \|^p + \| x - fx \|^p \\
 &= \| fex \|^p + \| fx - fex \|^p + \| x - fx \|^p \\
 &= \| fx \|^p + \| x - fx \|^p \\
 &= \| x \|^p
 \end{aligned}$$

Also sind $e \wedge f = ef$ und $e \vee f = e + f - ef$ L^P -Projektionen.

Damit sind für die entsprechenden L^P -Summanden wegen

$$(e \wedge f)X = eX \cap fX$$

$$(e \vee f)X = eX + fX$$

auch endlicher Durchschnitt und Summe wieder L^P -Summanden.

(b) Nach [CS] Thm. 10 ist $\mathbb{P}_p$ eine vollständige Boolesche Algebra von L^P -Projektionen, wobei ein wachsendes Netz $(e_i)_{i \in I}$ stark gegen $\sup_{i \in I} e_i$ konvergiert. Daraus folgt

$$\left(\sup_{i \in I} e_i \right) X = \left(\bigcup_{i \in I} e_i X \right)^-$$

Sei nun $(e_i)_{i \in I}$ ein beliebiges Netz in $\mathbb{P}_p$.

Betrachte $E := \{I'; I' \subset I \text{ endlich}\}$ als bzgl. der Inklusion gerichtete Indexmenge und definiere für alle $I' \in E$

$$f_{I'} := \sup_{i \in I'} e_i \in \mathbb{P}_p.$$

Da $(f_{I'})_{I' \in E}$ gerichtet ist, ist $\sup_{I' \in E} f_{I'} \in \mathbb{P}_p$ und

$$\sup_{I' \in E} f_{I'} = \sup_{i \in I} e_i \quad (1).$$

Nach (a) gilt für alle $I' \in E$

$$f_{I'} X = \sum_{i \in I'} e_i X \quad (2).$$

Dann folgt, daß

$$\left(\sup_{I' \in E} f_{I'} \right) X = \left[\bigcup_{i \in I} e_i X \right]^- ,$$

denn nach (1) ist $\sup_{I' \in E} f_{I'} > e_i$ für jedes $i \in I$, also

$$\left(\sup_{I' \in E} f_{I'} \right) X \supset e_i X \text{ für jedes } i \in I.$$

Da $\left(\sup_{I' \in E} f_{I'} \right) X$ abgeschlossener Unterraum ist, folgt

$$\left(\sup_{I' \in E} f_{I'} \right) X \supset \left[\mathcal{L} \left(\bigcup_{i \in I} e_i X \right) \right]^-.$$

Andererseits gilt, daß $(f_{I'})_{I' \in E}$ stark konvergiert gegen

$\sup_{I' \in E} f_{I'}$. Daher gilt für ein $x \in \left(\sup_{I' \in E} f_{I'} \right) X$, daß

$x = \left(\sup_{I'} f_{I'} \right) x = \lim_{I' \in E} f_{I'} x$ ist. Nach (2) ist aber

$$f_{I'} x \in \sum_{i \in I'} e_i X, \text{ also } x \in \left[\mathcal{L} \left(\bigcup_{i \in I} e_i X \right) \right]^-.$$

Folglich ist $\left(\sup_{i \in I} e_i \right) X = \left(\sum_{i \in I} e_i X \right)^-$ ein L^p -Summand.

(c) Ist $(e_i)_{i \in I}$ ein fallendes Netz von L^p -Projektionen,

so ist $(I - e_i)_{i \in I}$ ein steigendes Netz. Da $(I - e_i)_{i \in I}$

stark gegen $\sup_{i \in I} (I - e_i) = I - \inf_i e_i$ konvergiert, folgt,

daß $(e_i)_{i \in I}$ gegen $\inf_i e_i$ stark konvergiert, wobei

$\inf_i e_i \in \mathbb{P}_p$ ist.

Dann ist $\left(\inf_i e_i \right) X = \bigcap_i e_i X$, denn wegen $\inf_i e_i < e_i$ für

alle $i \in I$ gilt, daß $\left(\inf_i e_i \right) X \subset e_i X$ für alle $i \in I$ ist

und daher $\left(\inf_i e_i \right) X \subset \bigcap_{i \in I} e_i X$.

Andererseits gilt für $x \in \bigcap_{i \in I} e_i X$ $x = e_i x$ für alle $i \in I$.

Dann ist $x = \left(\inf_i e_i \right) x$, also $x \in \left(\inf_i e_i \right) X$.

Ist $(e_i)_{i \in I}$ ein beliebiges Netz, so wird wie in (b) für endliche $I' \subset I$

$$f_{I'} := \inf_{i \in I'} e_i \text{ gebildet.}$$

Analog zu (b) ist dann $\left(\inf_{i \in I} e_i \right) X = \bigcap_{i \in I} e_i X$.

Damit ist auch $\bigcap_{i \in I} e_i X$ ein L^p -Summand.

4.2 Satz

Ist N ein L^p -Summand in X für $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$, so gilt: Die L^p -Summanden in N sind genau die L^p -Summanden in X , die in N enthalten sind.

Beweis

Seien e und f die L^p -Projektionen auf X , die zu den L^p -Summanden N bzw. M gehören, wobei $M \subset N$ ist.

Dann ist $fe|_N \in [N]$ eine L^p -Projektion auf N , da fe sogar L^p -Projektion auf X ist und außerdem $\text{Bild } fe = M$ ist, denn für $x \in M$ gilt $x = fx$, und da $M \subset N$ ist, folgt $x = fex$. Also ist M ein L^p -Summand in N .

Sei umgekehrt M ein L^p -Summand in N mit der zugehörigen L^p -Projektion $f : N \rightarrow M$. Es soll gezeigt werden, daß M sogar ein L^p -Summand in X ist.

Definiere dazu $fe : X \rightarrow M$. Dann ist

Bild $fe = feX = fN = M$ und fe ist idempotent, da $fefex = ffeex = fex$ ist. Schließlich ist fe eine L^p -Projektion, denn für $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \|fex\|^p + \|x - fex\|^p &= \|fex\|^p + \|ex - fex + x - ex\|^p \\ &= \|fex\|^p + \|ex - fex\|^p + \|x - ex\|^p \\ &= \|ex\|^p + \|x - ex\|^p \\ &= \|x\|^p \end{aligned}$$

und für $p = \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \max \{ \|fex\|, \|x - fex\| \} &= \max \{ \|fex\|, \|ex - fex + x - ex\| \} \\ &= \max \{ \|fex\|, \max \{ \|ex - fex\|, \|x - ex\| \} \} \\ &= \max \{ \max \{ \|fex\|, \|ex - fex\| \}, \|x - ex\| \} \\ &= \max \{ \|ex\|, \|x - ex\| \} \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

[AE II] verwenden im Beweis des obigen Resultats für $p = 1$ ordnungstheoretische Hilfsmittel.

4.3 Satz

Ist N ein L^p -Summand in X mit der L^p -Projektion e für $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ und $\delta : X \rightarrow X/N$ die natürliche Abbildung, so gilt:

- (a) Als Einschränkungabbildung wird δ zu einer isometrischen Isomorphie von $(I - e)X$ auf X/N
- (b) Bilder und Urbilder von L^p -Summanden unter δ sind L^p -Summanden.

Beweis

(a) Ist $x \in (I - e)X$ und $y \in N$, so gilt für $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p \geq \|x\|^p$$

und für $p = \infty$ $\|x + y\| = \max \{\|x\|, \|y\|\} \geq \|x\|$

also $\|x + y\| \geq \|x\|$ und daher

$$\|\delta(x)\| = \inf \{\|x + y\| ; y \in N\} = \|x\|$$

Also ist $\delta|_{(I - e)X} : (I - e)X \longrightarrow X/N$ ein isometrischer Isomorphismus.

(b) Da $\bar{\delta} := \delta|_{(I - e)X}$ eine Isometrie ist, entsprechen

sich die L^p -Summanden in $(I - e)X$ und X/N eineindeutig.

Für einen L^p -Summanden $M = fX$ gilt dann, daß

$(I - e)M = (I - e)fX$ ein L^p -Summand in X ist, denn $(I - e)f$ ist eine L^p -Projektion. Nach Satz 4.2 ist $(I - e)M$ ein L^p -Summand in $(I - e)X$ und wegen der Isometrie ist

$\delta(M) = \bar{\delta}((I - e)M)$ ein L^p -Summand in X/N .

Falls umgekehrt M ein L^p -Summand in X/N ist, so ist

$\bar{\delta}^{-1}(M)$ ein L^p -Summand in $(I - e)X$ und daher in X nach

Satz 4.2. Also folgt nach Satz 4.1 und Satz 4.10, daß auch

$\delta^{-1}(M) = \bar{\delta}^{-1}(M) + N$ ein L^p -Summand in X ist, der N ent-

hält.

Die in Satz 4.1 bewiesenen Aussagen über L^p -Summanden für $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ lassen sich zum Teil auch auf M -Summanden übertragen, wie im folgenden gezeigt wird.

4.4 Satz

Sind N_1 und N_2 M -Summanden in einem Banachraum X , so ist auch $N_1 \cap N_2$ ein M -Summand.

Beweis

Sind e_1 und e_2 die zugehörigen M -Projektionen, so ist wegen $(e_1 e_2)' = e_2' e_1' \in \mathbb{P}_1$ ([Ae II] Prop. 2.5) auch $e_1 e_2$ eine M -Projektion und damit $N_1 \cap N_2 = \text{Bild } e_1 e_2$ ein M -Summand.

4.5 Bemerkung

Für eine Familie N_i ($i \in I$) von M -Summanden in X ist

$\bigcap_{i \in I} N_i$ i.a. kein M -Summand.

Gegenbeispiel

In CK -Räumen sind die M -Summanden genau die Annihilatoren von clopen Mengen in K .

Sei $K := [-1, 0] \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ versehen mit der Relativtopologie bzgl. $\mathbb{R}$ und betrachte die M -Summanden

$N_{\{\frac{1}{n}\}}$ ($n \in \mathbb{N}$) in CK (Annihilatoren von $\{\frac{1}{n}\}$). Dann ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{\{\frac{1}{n}\}} = N_{(\bigcup \{\frac{1}{n}\})^-} = N_{[0, 1] \cap K}$$

kein M -Summand, da $[0, 1] \cap K$ nicht clopen ist in K .

4.6 Bemerkungen

(a) Ist N_i ($i \in I$) eine Familie von M -Summanden in CK , so

ist $\bigcap_{i \in I} N_i$ stets ein M-Ideal in CK, da für $N_i = N_{A_i}$

mit $A_i \subset K$ clopen gilt:

$$\bigcap_{i \in I} N_i = \bigcap_{i \in I} N_{A_i} = N \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^-$$

und die M-Ideale in CK gerade die Annihilatoren abgeschlossener Mengen sind.

(b) Ist N_i ($i \in I$) eine Familie von M-Summanden in CK mit extrem unzusammenhängendem K (d.h. der Abschluß jeder offenen Menge ist offen), so ist $\bigcap_{i \in I} N_i$ ein M-Summand

in CK, denn für $N_i = N_{A_i}$ mit $A_i \subset K$ clopen gilt, daß $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^-$ clopen ist.

4.7 Satz

Ist N_i ($i \in I$) eine Familie von M-Summanden in einem reflexiven Banachraum X , so ist $\bigcap_{i \in I} N_i$ M-Summand in X .

Beweis

Nach [AE II] Cor. 2.8 stimmen die M-Ideale und M-Summanden in einem reflexiven Banachraum überein. Also ist zu zeigen, daß $\left(\bigcap_{i \in I} N_i \right)^0$ in X' ein L-Summand ist.

Es gilt $\left(\bigcap_{i \in I} N_i \right)^0 = \left(\sum_{i \in I} N_i^0 \right)^{-w}$, denn $\bigcap_{i \in I} N_i \subset N_i$ für alle $i \in I$ und daher $\left(\bigcap_{i \in I} N_i \right)^0 \supset N_i^0$ für alle $i \in I$.

Da $\left(\bigcap_{i \in I} N_i\right)^0$ ein schwach abgeschlossener Unterraum in X' ist,

folgt $\left(\bigcap_{i \in I} N_i\right)^0 \supset \left(\sum_{i \in I} N_i^0\right)^{-w}$.

Wäre $\left(\bigcap_{i \in I} N_i\right)^0 \supsetneq \left(\sum_{i \in I} N_i^0\right)^{-w}$, so gäbe es ein $x' \in \left(\bigcap_{i \in I} N_i\right)^0$

mit $x' \notin \left(\sum_{i \in I} N_i^0\right)^{-w}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert

ein $x \in X$ mit $x'(x) = 1$ und $\left(\sum_{i \in I} N_i^0\right)^{-w}(x) = 0$. Also folgt

$N_i^0(x) = 0$ für alle $i \in I$ und daher $x \in (N_i^0)_0 = N_i$ für

alle $i \in I$. Aus $x \in \bigcap_{i \in I} N_i$ folgt $x'(x) = 0$ im Widerspruch

zu $x'(x) = 1$. Also gilt $\left(\bigcap_{i \in I} N_i\right)^0 = \left(\sum_{i \in I} N_i^0\right)^{-w}$.

Wegen der Reflexivität von X stimmt der schwache Abschluß des Unterraumes $\sum_{i \in I} N_i^0$ mit dem starken Abschluß überein.

Da $\left(\sum_{i \in I} N_i^0\right)^{-}$ ein L-Summand ist nach Satz 4.1, ist $\bigcap_{i \in I} N_i$

ein M-Summand in X .

4.8 Lemma

Sei $T \in Z(X)$, dann gilt:

T ist M-Projektion genau dann, wenn T idempotent ist.

Beweis

Es genügt zu zeigen, daß jeder idempotente Operator

$T \in Z(X)$ schon M-Projektion ist. Aus $T^2 = T$ folgt

$(T')^2 = (T^2)' = T'$, wobei $T' \in C_1(X')$ ist. Nach [AE II]

Cor. 1.8 ist T' eine L-Projektion und daher ist T nach

[AE II] Prop. 2.5 eine M-Projektion.

4.9 Bemerkungen

(a) In [D] Kor. 2.10 wird ein analoges Resultat für L^p -Projektionen ($1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$) bewiesen:

Ist $T \in C_p(X)$, so gilt:

$T \in \mathbb{P}_p$ genau dann, wenn T idempotent ist.

(b) Für jede M -Projektion e gilt, daß $e \in Z(X)$ ist, da $e' \in C_1(X')$ nach [AE II] Prop. 2.5 und Definition des Zentralisators. Damit gilt allgemein: $C_\infty(X) \subset Z(X)$. Bedingungen für die Gleichheit von $C_\infty(X)$ und $Z(X)$ werden in [D] und [G] angegeben.

4.10 Satz

Sind N_1 und N_2 zwei M -Summanden in X , so ist auch $N_1 + N_2$ ein M -Summand.

Beweis

Für die zugehörigen M -Projektionen e_1 und e_2 gilt

$N_1 + N_2 = \text{Bild}(e_1 + e_2 - e_1 e_2)$. Da $e_1 + e_2 - e_1 e_2$

ein idempotentes Element des Zentralisators ist, ist

$N_1 + N_2$ nach Lemma 4.8 Bild einer M -Projektion.

4.11 Bemerkungen

(a) Für eine Familie $N_i (i \in I)$ von M -Summanden in X ist

$\left(\sum_{i \in I} N_i \right)^\perp$ i.a. kein M -Summand.

Gegenbeispiel

Sei $N_n (n \in \mathbb{N})$ die Familie der Folgen in c , die für alle Folgenglieder x_i mit $i > n$ verschwinden.

Dann ist $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} N_n\right)^- = c_0$ kein M -Summand in c (vgl. 1.3).

(b) Da jeder M -Summand ein M -Ideal ist ([AE II] Cor. 2.6), ist $\left(\sum_{i \in I} N_i\right)^-$ für M -Summanden $N_i (i \in I)$ in X wenigstens stets ein M -Ideal ([AE II] Prop. 2.1).

Ist X ein reflexiver Banachraum, so ist wegen [AE II] Cor. 2.8 $\left(\sum_{i \in I} N_i\right)^-$ sogar ein M -Summand.

5. DIE ISOMETRIE ZWISCHEN $C_p(X)$ UND $C_q(X')$

Für einen Banachraum X gilt nach $[B_2]$ Lemma 2.2, daß der Adjungierte einer L^p -Projektion auf X eine L^q -Projektion auf X' ist, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

Hier soll gezeigt werden, daß sogar eine isometrische Isomorphie zwischen den Cunningham-Algebren $C_p(X)$ und $C_q(X')$ für $1 \leq p < \infty$ besteht.

5.1 Satz

Auf einem Banachraum X sind $C_p(X)$ und $C_q(X')$ für $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ isometrisch isomorph. (Für $p = 1$ ist $q = \infty$).

Beweis

Die Abbildung, die jedem Operator $T \in [X]$ den Adjungierten $T' \in [X']$ zuordnet, ist linear und isometrisch. Damit ist auch die Einschränkung dieser Abbildung auf $C_p(X)$ isometrisch. Sie hat ihren Bildbereich in $C_q(X')$, da nach $[B_2]$ Lemma 2.2 $[\mathbb{P}_p(X)]' \subset \mathbb{P}_q(X')$ und wegen Stetigkeit und Linearität der Adjunktion auch $[C_p(X)]' \subset C_q(X')$ gilt. Um zu beweisen daß die Einschränkung surjektiv ist, genügt es zu zeigen, daß zu $e \in \mathbb{P}_q(X')$ ein $f \in \mathbb{P}_p(X)$ existiert, sodaß $f' = e$ ist.

Nach $[E]$ Satz 1.8 ist e als L^q -Projektion auf einem Dualraum w^* -stetig. Dann folgt nach $[AE \text{ II}]$ Prop. 4.5 die Existenz eines $f \in [X]$ mit $f' = e$.

Da $(f^2)' = (f')^2 = e^2 = e = f'$ ist, folgt aus der Injektivität der Adjunktion, daß f idempotent ist.

Da $f = f''|_X$ und $f'' = e'$ eine L^p -Projektion ist, ist $f \in \mathbb{F}_p(X)$.

5.2 Bemerkung

$C_\infty(X)$ und $C_1(X')$ sind i.a. nicht isomorph.

Gegenbeispiel

Sei $X = C[0,1]$. Da $C[0,1]$ keine nichttrivialen M -Summanden hat, ist $C_\infty(X) = \mathbb{R} \cdot I$.

Da aber in $C[0,1]$ genügend viele M -Ideale existieren, gibt es in $X' = (C[0,1])'$ nichttriviale L -Summanden, also ist auch $C_1(X') \neq \mathbb{R} \cdot I$.

In Analogie zur Begriffsbildung der M -Ideale in einem Banachraum X liegt folgende allgemeine Definition nahe für

$$1 \leq p \leq \infty \text{ und } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 :$$

5.3 Definition

Ein abgeschlossener Unterraum $J \subset X$ heißt L^p -Ideal, wenn der Annihilator $J^0 \subset X'$ ein L^q -Summand ist.

Dann sind die L^∞ -Ideale gerade die M -Ideale. Jeder M -Summand ist ein M -Ideal ([AE II] Cor. 2.6), doch gibt es etwa in CK M -Ideale, die keine M -Summanden sind. Nach [AE II] 7.1 fallen die L^1 -Ideale mit den L^1 -Summanden zusammen. Dies gilt auch für $1 \leq p < \infty$, wie folgendes Korollar zeigt:

5.4 Korollar

Für $1 \leq p < \infty$ fallen die L^p -Ideale und die L^p -Summanden in einem Banachraum X zusammen.

Beweis

Ist $J \subset X$ ein L^p -Summand, also $J = \text{Bild } e$ für $e \in \mathbb{P}_p(X)$, so ist $J^0 = \text{Bild } (I - e')$ wegen $e' \in \mathbb{P}_q(X')$ ein L^q -Summand und damit J ein L^p -Ideal.

Sei umgekehrt $J \subset X$ ein L^p -Ideal, also $J^0 \subset X'$ ein L^q -Summand und damit $J^0 = \text{Bild } f$ für $f \in \mathbb{P}_q(X')$, so folgt nach Satz 5.1 die Existenz eines $e \in \mathbb{P}_p(X)$ mit $e' = f$.

Damit gilt: $J = (J^0)_0 = (\text{Bild } e')_0 = \text{Bild } (I - e)$.

Also ist J ein L^p -Summand.

6. Z-IDEALE

Die L^p -Summanden in einem Banachraum X für $1 \leq p < \infty$ werden in [E] Satz 2.12 charakterisiert als die abgeschlossenen Unterräume J von X , für die gilt:

$$\bigwedge_{T \in [C_p(X)]_{\text{Komm}}} TJ \subseteq J .$$

Dies motiviert zur Untersuchung des Zentralisators die Definition einer Klasse von abgeschlossenen Unterräumen mit ähnlichen Eigenschaften.

6.1 Definition

Sei J ein abgeschlossener Unterraum in einem Banachraum X . Dann heißt J Z-Ideal, wenn gilt:

$$\bigwedge_{T \in [Z(X)]_{\text{Komm}}} TJ \subseteq J .$$

Durch die Elemente des Zentralisators werden Z-Ideale erzeugt:

6.2 Lemma

Ist $T \in Z(X)$, so ist $(TX)^-$ ein Z-Ideal.

Beweis

Sei $S \in [Z(X)]_K$, so gilt

$$S[(TX)^-] \subseteq [S(TX)]^- = [T(SX)]^- \subseteq (TX)^- .$$

Daher sind M -Summanden auch Z-Ideale, denn jede M -Projektion

ist enthalten im Zentralisator und die M-Summanden sind abgeschlossene Unterräume.

Bezüglich Durchschnitt und Summenbildung haben die Z-Ideale Permanenzeigenschaften für beliebige Indexmengen:

6.3 Satz

Sei $(J_i)_{i \in I}$ eine Familie von Z-Idealen in X, dann sind auch

$\bigcap_{i \in I} J_i$ und $\left(\sum_{i \in I} J_i\right)^-$ wieder Z-Ideale.

Beweis

Sei $T \in [Z(X)]_K$, dann gilt

$$T \left(\bigcap_{i \in I} J_i \right) \subset \bigcap_{i \in I} T J_i \subset \bigcap_{i \in I} J_i \quad \text{und}$$

$$T \left(\sum_{i \in I} J_i \right)^- \subset \left[T \left(\sum_{i \in I} J_i \right) \right]^+ \subset \left(\sum_{i \in I} T J_i \right)^+ \subset \left(\sum_{i \in I} J_i \right)^+.$$

In Satz 4.2 wurde für einen Banachraum X gezeigt, daß die M-Summanden in einem M-Summanden N genau die M-Summanden in X sind, die in N enthalten sind. Da M-Summanden insbesondere Z-Ideale sind, wird dies Resultat durch den folgenden Satz erweitert.

6.4 Satz

Sei N ein M-Summand in X. Dann sind die Z-Ideale in N genau die Z-Ideale in X, die in N enthalten sind.

Beweis

Sei e die M-Projektion zum M-Summand N.

Sei J ein Z -Ideal in N und sei $T \in [Z(X)]_K$.

Dann ist $\bar{T} := T|_N \in [Z(N)]_K$, denn sei $S \in Z(N)$, so ist nach [G] Satz 2.3 $S \circ e \in Z(X)$ und daher $T \circ (S \circ e) = (S \circ e)T$. Damit folgt

$$\bar{T} \circ S = T \circ (S \circ e) = (S \circ e)T = S \circ (T \circ e) = S \circ \bar{T}, \text{ also}$$

$$\bar{T} \circ S = S \circ \bar{T} \text{ und daher } \bar{T} \in [Z(N)]_K.$$

Da J ein Z -Ideal in N ist, gilt $\bar{T}J \subset J$ und damit folgt $TJ \subset J$.

Sei umgekehrt $T \in [Z(N)]_K$ und J ein Z -Ideal in X mit $J \subset N$.

Dann ist $T \circ e \in [Z(X)]_K$. Denn sei $S \in Z(X)$, so ist nach [G] Satz 2.3 $\bar{S} := S|_N \in Z(N)$ und damit $T \circ \bar{S} = \bar{S} \circ T$.

$$\text{Also gilt } (T \circ e) \circ S = T \circ S \circ e = T \circ \bar{S} \circ e = \bar{S} \circ T \circ e = S \circ e \circ T \circ e = S \circ T \circ e^2 = S \circ (T \circ e).$$

Damit folgt $T \circ e(J) \subset J$ und da $J \subset N$ ist, folgt $TJ \subset J$.

Im Beweis von Satz 6.4 wird die Identifizierbarkeit von $Z(N)$ und $Z(X)|_N$ für M -Summanden N benutzt. Daß für ein Z -Ideal J diese Identifikation i.a. nicht möglich ist, zeigt folgendes Beispiel:

6.5 Gegenbeispiel

Sei $X = C[0,1]$. Dann ist $J = J_{\{0\}}$ ein M -Ideal und wie in Satz 6.10 gezeigt wird, auch ein Z -Ideal.

Nach Satz 2.1 ist $J_{\{0\}} \cong C_0(0,1]$ und damit gilt:

$$Z(J) \cong Z(C_0(0,1]) \cong C^b(0,1] \cong C\mathcal{B}(0,1].$$

Dann ist nach Kor. 2.10 $Z(X) \cong C[0,1] \cong C(\alpha(0,1])$, wobei

$\alpha(0,1]$ die Einpunkt- und $\beta(0,1]$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung sind.

Außerdem gilt: $C[0,1] \cong Z(X)|_J$, denn die Abbildung $f \mapsto T_f|_J$ ist surjektiv nach Konstruktion und injektiv, da gilt:

$$T_{f_1}|_J = T_{f_2}|_J \Rightarrow \begin{array}{l} f \in \bigwedge C[0,1] \\ f(0) = 0 \\ f|_{(0,1]} \neq 0 \end{array} \quad T_{f_1}(f) = T_{f_2}(f)$$

$$\Rightarrow f_1 \cdot f = f_2 \cdot f \Rightarrow f_1|_{(0,1]} = f_2|_{(0,1]} \Rightarrow f_1 = f_2.$$

Damit ist $Z(X)|_J \cong C[0,1] \cong C(\alpha(0,1])$ und $Z(J) \cong C\beta(0,1]$.

Also bei Identifikation von $Z(X)|_J$ und $Z(J)$ wäre $\alpha(0,1] \cong \beta(0,1]$, was nicht möglich ist, da die Kardinalzahl von $[0,1]$ gleich der Kardinalzahl des Kontinuums also $\mathfrak{c}$ ist, während nach [W] S. 141 die Kardinalzahl von $\beta(0,1]$ gleich $2^{\mathfrak{c}}$ ist.

Wie das Gegenbeispiel 6.7 zeigt, kann der Zentralisator eines Banachraumes trivial sein, obwohl nichttriviale M -Ideale existieren. In Satz 6.8 wird gezeigt, daß $Z(X)$ trivial ist genau dann, wenn nur triviale Z -Ideale existieren.

6.6 Satz

(a) Hat ein Banachraum X nur triviale M -Ideale, so ist $Z(X)$ trivial.

(b) Ist Prim X vollständig regulär, so gilt die Umkehrung.

Beweis

Nach dem Satz von Dauns-Hofmann für beliebige reelle Banachräume ([AE II] Thm. B) gilt $Z(X) \cong C^b \text{Prim } X$, wobei $\text{Prim } X$ die Menge aller primitiven M -Ideale in X ist.

(a) Wenn $Z(X)$ nichttrivial ist, ist $\dim [C^b \text{Prim } X] > 1$ und damit $\text{Prim } X$ nicht indiskret. Also gibt es eine nichttriviale abgeschlossene Menge in $\text{Prim } X$ und damit nach [AE II] Cor. 3.6 ein nichttriviales M -Ideal in X .

(b) Existiert ein nichttriviales M -Ideal in X , so auch eine nichttriviale abgeschlossene Menge in $\text{Prim } X$. Damit ist $\text{Prim } X$ nicht indiskret. Unter der Voraussetzung, daß $\text{Prim } X$ vollständig regulär ist, gibt es nichtkonstante Funktionen in $C^b \text{Prim } X$. Damit ist $\dim [C^b \text{Prim } X] > 1$ und $Z(X)$ nicht trivial.

6.7 Gegenbeispiel

Die Umkehrung von Satz 6.6 (a) gilt i.a. nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $[H]$ die Banachalgebra aller linearen, stetigen Operatoren auf einem unendlichdimensionalen Hilbertraum H und sei $[H]_S$ der Teilraum der Selbstadjungierten. Da die Menge der kompakten Operatoren $[H]_C$ ein uniform abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $[H]$ ist, ist nach [AE II] Prop. 6.18 der Raum $[H]_{SC}$ der selbstadjungierten und kompakten Operatoren ein nichttriviales M -Ideal in $[H]_S$. Nach [AE II] Cor. 6.17 ist aber $Z([H]_S)$ trivial, weil das Zentrum von $[H]$ trivial ist.

Außerdem ist damit gezeigt, daß $\text{Prim}([H]_S)$ nicht vollständig regulär ist, weil sonst der Zentralisator $Z([H]_S)$ nichttrivial sein müßte.

6.8 Satz

Für einen Banachraum X gilt:

$Z(X)$ ist trivial genau dann, wenn nur triviale Z -Ideale existieren.

Beweis

Sei $Z(X)$ trivial, dann ist $[Z(X)]_K = [X]$, der Menge aller linearen, stetigen Operatoren auf X . Ist J ein Z -Ideal in X , dann gilt $TJ \subset J$ für alle $T \in [X]$. Da nach [R] S. 278 $[X]$ irreduzibel ist, ist J trivial.

Sei $Z(X)$ nichttrivial, dann existiert ein $T \in Z(X) \setminus \mathbb{R} \cdot I$.

Nach [AE II] Thm. 4.8 folgt $T'q = \lambda(q) \cdot q$ für alle $q \in \text{ex } S_1^{X'}$.

Sei ein $q \in \text{ex } S_1^{X'}$ gewählt, was nach dem Satz von Krein-Milman existiert, und sei $S := T - \lambda(q) \cdot I$ definiert. Dann ist $S \in Z(X)$ und nach Lemma 6.2 ist $J := (SX)^-$ ein Z -Ideal in X .

Wäre $J = \{0\}$, so gilt $S = 0$ und damit $T = \lambda(q) \cdot I$, also $T \in \mathbb{R} \cdot I$.

Wäre $J = X$, so folgt $X = J \subset \text{Kern } q \subset X$, da für alle $x \in X$ $q(Sx) = S'q(x) = T'q(x) - \lambda(q) \cdot Iq(x) = 0$. Also wäre $q = 0$. Aus diesen Widersprüchen folgt, daß J ein nichttriviales Z -Ideal ist.

Durch Satz 6.3 wird insbesondere bewiesen, daß die Klasse der Z-Ideale in einem beliebigen Banachraum nicht gleich der Klasse der M-Summanden oder der M-Ideale sein kann, weil nach Bemerkung 4.5 bzw. [AE II] S. 138 weder der beliebige Durchschnitt von M-Summanden noch der von M-Idealen i.a. wieder ein M-Summand bzw. M-Ideal ist. Nach Lemma 6.2 sind die M-Summanden stets Z-Ideale.

Im folgenden wird durch Gegenbeispiele gezeigt, daß i.a. die M-Ideale keine Z-Ideale sind und umgekehrt die Z-Ideale auch keine M-Ideale, doch sind die beiden Mengen gleich in CK-Räumen.

6.9 Gegenbeispiele

(a) $\{M\text{-Ideale}\} \not\subset \{Z\text{-Ideale}\}$

Nach Gegenbeispiel 6.7 bilden die kompakten, selbstadjungierten Operatoren ein nichttriviales M-Ideal in $[H]_S$.

Da $Z([H]_S)$ trivial ist, gibt es nach Satz 6.8 nur triviale Z-Ideale, also kann $[H]_{SC}$ kein Z-Ideal sein.

(b) $\{Z\text{-Ideale}\} \not\subset \{M\text{-Ideale}\}$

(Dieses Gegenbeispiel verdanke ich R. Evans).

Sei $X := C[0,1] \times \mathbb{R}$ normiert durch

$$\|(g, \lambda)\| := \max \{\|g\|, |g(0)| + |\lambda|\}$$

Dann ist $U = \{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein abgeschlossener Unterraum in dem Banachraum X .

(I) U ist ein Z-Ideal.

Zum Beweis hierfür wird folgende Aussage benötigt:

$$\text{Ist } f \in C[0,1], \text{ so ist } \bar{f} \in Z(X).$$

Hierbei ist $\bar{F}$ als Operator auf X definiert durch:

$$\bar{F}((g, \lambda)) = (f \cdot g, \lambda \cdot f(0)).$$

Um zu zeigen, daß $\bar{F} \in Z(X)$ ist, wird die M -Beschränktheit von $\bar{F}$ auf X mit der Konstanten $\|f\|$ bewiesen.

Sei dazu $B := B((g_0, \lambda_0), r)$ eine Kugel um den Punkt $(g_0, \lambda_0) \in X$, so daß $\pm \|f\| \cdot (g, \lambda) \in B$ ist.

Also ist $\|\pm \|f\|(g, \lambda) - (g_0, \lambda_0)\| \leq r$ und daher

$$\max \{ \|\pm \|f\|g - g_0\|, |\pm \|f\| \cdot g(0) - g_0(0)| + |\pm \|f\|\lambda - \lambda_0| \} \leq r.$$

Da die Multiplikationsoperatoren auf $C[0,1]$ nach Kor. 2.8 M -beschränkt sind und insbesondere

$$\|\pm \|f\|g - g_0\| \leq r \text{ ist, folgt } \|fg - g_0\| \leq r.$$

Betrachte nun den $\mathbb{R}^2$ mit der l^1 -Norm. Dann folgt aus $|\pm \|f\|g(0) - g_0(0)| + |\pm \|f\|\lambda - \lambda_0| \leq r$, daß

$$\pm \|f\|(g(0), \lambda) \in B' := B_{(\mathbb{R}^2, l^1)}((g_0(0), \lambda_0), r) \text{ ist.}$$

Da $-\|f\| \leq f(0) \leq +\|f\|$ und B' eine konvexe Kugel in $\mathbb{R}^2$ ist, folgt $f(0) \cdot (g(0), \lambda) \in B'$.

$$\text{Also gilt } |f(0) \cdot g(0) - g_0(0)| + |\lambda f(0) - \lambda_0| \leq r.$$

Damit folgt insgesamt:

$$\max \{ \|f \cdot g - g_0\|, |f(0) \cdot g(0) - g_0(0)| + |\lambda f(0) - \lambda_0| \} \leq r$$

und nach Definition der Norm:

$$\|(f \cdot g, \lambda f(0)) - (g_0, \lambda_0)\| \leq r.$$

Also ist $\bar{F}((g, \lambda)) \in B$ und $\bar{F}$ damit M -beschränkt.

Um zu beweisen, daß U ein Z -Ideal ist, genügt es zu zeigen, daß für $T \in [Z(X)]_K$ folgt $T((0, 1)) \in U$.

Wäre $T((0,1)) = (f,\lambda)$ mit $f \neq 0$, so existierte ein $x \in (0,1]$ mit $f(x) \neq 0$. Wähle $g \in C[0,1]$ mit $g(0) = 1$ und $g(x) = 0$. Dann ist $\bar{g} \in Z(X)$ und es gilt
 $T\bar{g}(0,1) = T(0,1) = (f,\lambda)$ sowie
 $\bar{g}T(0,1) = \bar{g}(f,\lambda) = (fg,\lambda)$.

Da $T \in [Z(X)]_{\mathbb{K}}$ ist, folgt $(fg,\lambda) = (f,\lambda)$,
 also insbesondere $f = f \cdot g$ im Widerspruch zu
 $f(x) \neq 0$ und $(f \cdot g)(x) = 0$.

Damit ist gezeigt, daß U ein Z -Ideal ist.

(II) U ist kein M -Ideal

Dazu wird gezeigt, daß U nicht einmal die 2-Kugel-Eigenschaft besitzt (vgl. [AE I] Thm. 5.9).

Betrachte die offenen Kugeln in X :

$$B_1 := ((1,1), 1 \frac{1}{3})$$

$$B_2 := ((1,-1), 1 \frac{1}{3})$$

für die $(1,0) \in B_1 \cap B_2$

sowie $(0,1) \in B_1 \cap U$

und $(0,-1) \in B_2 \cap U$ gelten.

Aber es folgt, daß $B_1 \cap B_2 \cap U = \emptyset$, da sonst ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existierte mit

$$\|(0,\lambda) - (1,-1)\| < 1 \frac{1}{3}$$

und $\|(0,\lambda) - (1,1)\| < 1 \frac{1}{3}$,

woraus $|\lambda + 1| < \frac{1}{3}$ und $|\lambda - 1| < \frac{1}{3}$ folgte. Da dies nicht erfüllt werden kann, ist U kein M -Ideal.

6.10 Satz

Für CK-Räume gilt: $\{Z\text{-Ideale}\} = \{M\text{-Ideale}\}$

Beweis

Sei $J \subset CK$ ein M-Ideal, dann ist $J = J_A$ mit abgeschlossenem $A \subset K$. Sei $T \in [Z(CK)]_K$. Dann existiert nach Satz 2.12 ein $f_T \in CK$, so daß $Tf = f_T \cdot f$ für alle $f \in CK$ ist. Damit gilt für alle $f \in J_A$, daß $Tf \in J_A$ ist und daher $TJ \subseteq J$. Also ist J ein Z-Ideal.

Umgekehrt sei $J \subset CK$ ein Z-Ideal. Dann gilt für $T \in [Z(CK)]_K$ $TJ \subseteq J$, also auch für alle $f_T \in CK$ $f_T J \subset J$. Damit ist $J \subset CK$ ein abgeschlossenes Ideal und $J + iJ \subset C_e K$ ist ebenfalls ein abgeschlossenes Ideal. Nach [AE II] Satz 6.18 ist dann $J = (J + iJ) \cap CK$ ein M-Ideal.

LITERATURVERZEICHNIS

- [AE I; II] E.M. Alfsen - E. Effros: Structure in real Banach spaces I, II, Ann. of Math., 96 (1972), 98 - 173
- [B₁] E. Behrends: Über die L^P -Struktur in $A(K)$ -Räumen, erscheint in Math. Zeitschriften
- [B₂] E. Behrends: L^P -Struktur in Banachräumen, Arbeitspapier FU Berlin 1974 eingereicht bei Studia Mathematica
- [CER] F. Cunningham - E. Effros - N.M. Roy: M-Structure in Dual Banach Spaces, Israel J. Math. 14 (1973) 304 - 308
- [CS] H.B. Cohen - F.E. Sullivan: Projecting onto cycles in smooth reflexive Banach Spaces, Pacific J. Math. 34 (1970) 355 - 364
- [D] R. Danckwerts: Über die Cunningham-p-Algebra und den Zentralisator reeller Banachräume, Dissertation, FU Berlin, 1975
- [DY] M. Day: Normed linear spaces, Springer Verlag Berlin, 1973

- [E] R. Evans: Projektionen mit Normbedingungen in
reellen Banachräumen,
Dissertation, FU Berlin, 1974

- [G] S. Göbel: Über die L^p -Struktur in Produkten und den
Zentralisator reeller Banachräume
Dissertation, FU Berlin, 1975

- [GJ] L. Gillman - M. Jerison: Rings of Continuous Functions,
Van Nostrand, Princeton (1960)

- [R] C.E. Rickart: Banach Algebras,
Van Nostrand Company, Princeton, 1960

- [W] S. Willard: General Topology,
Addison Wesley, 1970.

LEBENS LAUF

29.7.1943	geb. in Unshausen (Hessen) Vater: Landwirt Otto Meyfarth Mutter: Gertrud Meyfarth
1950 - 54	Volksschule in Unshausen
1954 - 63	Gymnasium in Homberg/Efze
1963 - 64	Wehrpflicht beim Bundesgrenzschutz
WS 64/65 - WS 65/66	Studium von Mathematik und Physik an der Phillips-Universität Marburg
SS 66 - SS 68	Studium an der Freien Universität Berlin
Mai 1967	Vordiplom in Mathematik und Physik
Sept. 1968 - Sept. 1969	Studium an der Tulane University in New Orleans, USA
WS 69/70 - WS 70/71	Studium an der Freien Universität Berlin
Mai 1970	Heirat mit Margie Ann Holloway
Okt. 1970	Diplom in Mathematik und Physik
Sept. 1971 - Sept. 1972	Studium und Forschung an der Stanford University, USA

- Juni 1972 Masters of Science in Mathematik von der
Stanford University
- 1972 - 1974 Lehrbeauftragter an der Technischen Fach-
hochschule Berlin
- 1973 Lehrbeauftragter an der University of
Maryland in Berlin
- seit Jan. 1974 Wiss. Assistent an der Technischen Univer-
sität Berlin

